東洋大学学術情報リポジトリ　Toyo University Repository for Academic Resources

<論文>経営活動分析のためのシミュレーション技法における統計学的諸問題

著者	高桑 宗右ヱ門
著者別名	Takakuwa Soemon
雑誌名	経営論集
巻	31
ページ	1-22
発行年	1988-03-25
URL	http://id.nii.ac.jp/1060/00005741/

Creative Commons : 表示 - 非営利 - 改変禁止
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/deed.ja

経営活動分析のためのシミュレーション技法における統計学的諸問題

高桑宗右ヱ門

目　次

Ⅰ．緒　言

シミュレーション技法は，実務において近年最も頻繁に用いられているシステム技法である[1]。特にパーソナル・コンピュータを含むコンピュータの多機能化・低廉化によって，ますます実用に供されるようになってきた。

本来，シミュレーション技法は代替案の比較・評価のためのシステム技法である[2]。シミュレーション実験はいわば標本抽出実験であるから，代替案の比較・評価にあたっては統計的分析が必要である。従来，シミュレーション技法に関してはモデル化やプログラミングが強調されてきたのであるが，結果の解析を含めた統計学的側面について統一的に論じられることは少なかった。

そこで本稿では，生産活動，流通・商業活動，サービス活動など経営活動に対して，シミュレーション技法を実際に適用する際の統計学的諸問題について考察する。特に，データ収集と入力データの設定，および実験結果への統計的手法の適用に分けて検討する。

II．シミュレーション技法における入出力データ

1.　経営活動分析のためのシミュレーション技法の役割

シミュレーション技法は，現実のシステムあるいは将来構築しようとするシステムに対してモデルを作成し，時系列的な挙動を調べるシステム技法である。現実のシステムに対して適用する場合には，作動（あるいは稼動(働)，営業）中の状況を中断することなく，代替案(複数ある場合もある）と現状との比較・評価が可能である。また，将来構築しようとするシステムに対して適用する場合には，実際にそのシステムやプロトタイプを構築することなく，手軽に代替案の比較・評価を行うことができる。

本稿では，以下に列挙する経営活動を念頭において，シミュレーション技法を適用する際の統計学的諸問題について検討する。

1）　原材料（素材）から製品に至る生産活動
2）　流通（モノとヒトの流れ）や商業活動
3）　サービス活動

上記のシステムの全体あるいは一部に対するシミュレーション技法の適用を念頭に置く。

2.　シミュレーション技法の解析手順

実際のシステムに対して，シミュレーション技法を適用する際の手順を以下に列挙する。

1）　問題の認識
2）　モデルの定式化
3）　必要なデータの特定とデータ収集
4）　モデルの妥当性の検証
5）　シミュレーション実験の計画
6）　シミュレーション実験の実施
7）　シミュレーション結果の解析
8）　シミュレーション結果の解釈と意思決定

3.　シミュレーション技法における入出力データの位置づけ

前節で述べた解析手順において，データ（標本）を扱う段階としては，3）必要なデータの特定とデータ収集，および5)ないし7)のシミュレーション実

験に関する計画・実施・統制がある。本稿では，前者におけるデータを入力データと呼び，そして後者については出力データと呼ぶことにする。両者の間では，データの性質・内容は異なるので，当然データの取扱い方は異なる。しかし，シミュレーション実験を実施する場合には，生産活動，流通・商業活動，サービス活動を問わず，共通した入出力データの特徴が存在する。

まず入力データについて考えてみる。シミュレーション・モデルを構築するために必要な入力データとしては，モデルの物理的条件を規定するデータが必要である。たとえば，機械の台数やオペレータの数，コンベヤの速度などがこれらに相当する。特に統計的な検討が必要な入力データとしては次の事項が挙げられよう。

1）エンティティの発生時間間隔
　例）・ジョブや客の到着時間間隔
　　・機械故障の発生時間間隔
2）エンティティに対するサービス所要時間
　例）・ジョブ加工（処理・作業）時間
　　・客との応対時間
3）移動時間
　例）・ジョブや客の移動に要する時間
　　・ロボットや自動搬送車の移動時間

他方，シミュレーション実験の結果得られる出力データとしては，次の事項が挙げられよう。

1）エンティティのシステム内（部分システムの場合を含む）滞留時間
　例）・あるジョブが素材として到着してから完成品として出荷されるまでの所要時間
　　・客が店に到着してからサービスを受けて帰るまでの時間
2）稼動（働）率・利用率
　例）・ある機械の稼動率
　　・あるオペレータの作業をしている時間の割合
3）サービス待ち（待ち行列内）のエンティティ数
　例）・ある工程間の仕掛在庫数
　　・窓口に対して並んだ客の人数
4）サービス済みのエンティティ数

例)・完成した製品の数

・店の窓口で用件が済んで帰っていった客の人数

Ⅲ. データ収集と分布の特定化

1. データ収集

Ⅱ.2で述べたシミュレーション技法の解析手順において，ステップ3で必要なデータを特定化して，適正なデータ収集方法によりデータを得ることは，妥当性のあるモデルを構築することと同様に重要な作業である。たとえモデルを“正しく”構築したとしても，正しくない入力データを用いてシミュレーション実験を実施して得られた結果は，当然のことながら，妥当性を欠くものとなる。

従来，シミュレーションのモデル化に関する文献は，種々のシミュレーション言語について用意されているが，シミュレーション実験に関して必要なデータの収集方法や，収集したデータの解析方法に関して系統的に指摘した文献はほとんど見当らない。そこで，ここでは，生産活動，流通・商業活動，サービス活動などを念頭においた経営活動を分析する場合に，データ収集にあたって採られる方策について検討し，シミュレーション実験の入力データとして頻出する確率分布について考察を加える。そして，得られたデータから母集団の分布形を特定化し，そのパラメータを推定するまでの手順について述べる。なお，ここでは，現実の場で実用に供しやすいように統一的に整理して論述する。

2. データ収集方法

上述のようにシミュレーション実験において，入力データの主要な部分は，分布（定数を含む）を特定して，そのパラメータを推定することである。そのためには，必要なデータ（あるいは情報）を収集しなければならない。

一般に，シミュレーション実験では，データは次の2種類に性質上分類される。

1） 時間

2） 数量

シミュレーション実験自体は時系列的な推移を観察するのであるから，入力データも時間に関するものが大部分を占める。エンティティのシステムへ

の到着時間間隔や，エンティティのサービス時間などを直接測定するためにはストップ・ウォッチを用いる。また，数量を数えるためにはカウンタ（数取器）を用いることによって直接測定することができる。伝統的な IE の手法として，間接的に作業時間（上記のサービス時間に相当）を見積る PTS (Predetermined-Time Standard) 法があり，主として，WF (Work Factor) 法と MTM (Methods Time Measurement) 法が用いられている。WF 法では，使用身体部位，移動距離，重量／抵抗，動作の困難性を考慮して，対象とする作業を分析して動作時間を設定する。また MTM 法では，あらかじめ設定されている基本動作によって対象作業を分析して動作時間値を定める。これら両手法はオペレータ（人間）による作業時間について,「標準時間」を設定するときに用いられるもので，１点見積りの一種である。機械加工時間に関しては，機械別，加工材質，加工寸法，精度などによって，標準時間が得られることがある。機械加工時間はオペレータによる作業時間と異なり，実際の所要時間はバラツキが少ないと考えられる。しかし，異なるジョブ（工作物）を同一機械で加工する場合には，ジョブの内容によって加工時間にはバラツキが生ずる。また，作業日報など過去の実積からある程度見積りを行うことができる場合もあるが，正確性に問題があることもあろう。

流通・商業活動，サービス活動においては，解析の対象が客あるいは品物であり，ストップ・ウォッチ，カウンタによる直接観測や，経験的な見積り，過去の実績などに基づいて，入力データのための分析が行われることになる。

3.　確率分布

(1)　はじめに

Ⅲ.2でデータを収集したあとで，ヒストグラム（柱状度数図）や点状度数図などにデータをまとめることが行われる。そして，どのような母集団からデータが得られたのかを推定することが必要となる。すなわち，母集団の確率分布を特定化し，そしてそのパラメータを推定しなければならない[2]。

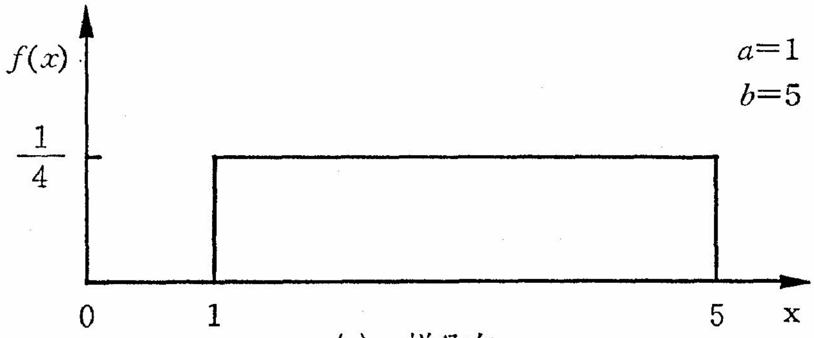
ここでは，生産活動をはじめ流通・商業活動，サービス活動などで，シミュレーション実験の入力データとしてよく用いられる確率分布について，特長を分類・整理し検討を加える。確率分布としては，一様分布，三角分布，指数分布，正規分布，ポアソン分布，ワイブル分布をとりあげる。各分布に

表1　シミュレーション実験で

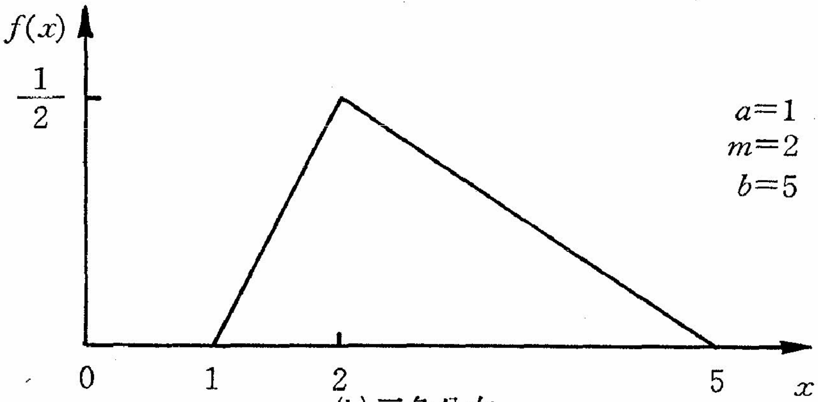
確率分布	パラメータ	平均 分散
一様分布	a：最小値 b：最大値	$\mu=\frac{1}{2}(a+b)$ $\sigma^2=\frac{1}{12}(b-a)^2$
三角分布	a：最小値 m：モード b：最大値	$\mu=\frac{1}{3}(a+m+b)$ $\sigma^2=\frac{1}{18}\{a(a-m)+b(b-a)+m(m-b)\}$
指数分布	μ：平均	— $\sigma^2=\mu^2$
正規分布	μ：平均 σ：標準偏差	— —
ポアソン分布	μ：平均	— $\sigma^2=\mu$
ワイブル分布	α：形状パラメータ β：尺度パラメータ	$\mu=\beta^{1/\alpha}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$ $\sigma^2=\beta^{2/\alpha}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]$

頻繁に用いられる確率分布

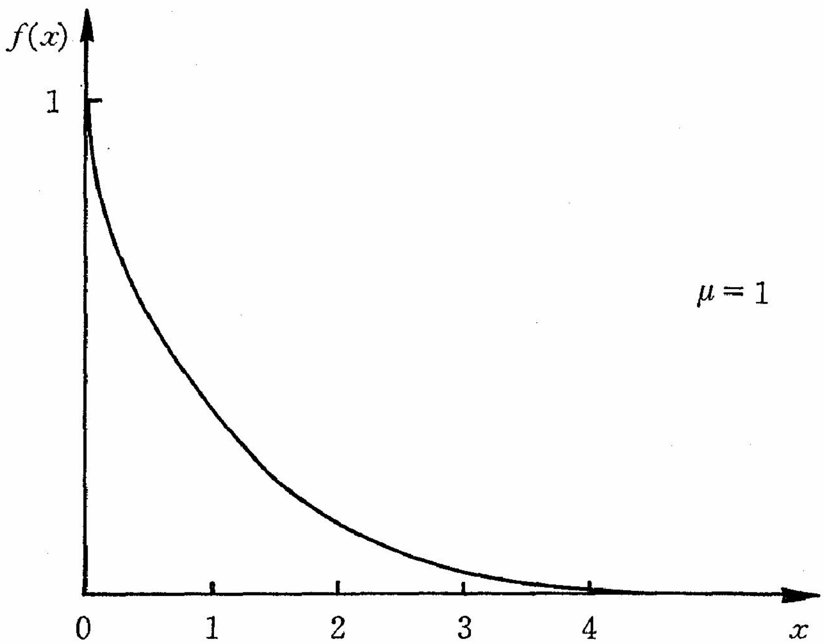
確　率　密　度　関　数
$f(x)=\dfrac{1}{b-a} \qquad (a \leq x \leq b)$
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(m-a)(b-a)} & (a \leq x \leq m) \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-m)(b-a)} & (m < x \leq b) \end{cases}$
$f(x)=\dfrac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \qquad (x \geq 0)$
$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad (-\infty < x < \infty)$
$p(x)=\dfrac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} \qquad (x=0,\ 1,\ 2\cdots)$
$f(x)=\dfrac{\alpha}{\beta} x^{\alpha-1} e^{-x^{\alpha}/\beta} \qquad (x \geq 0)$



(a) 一様分布

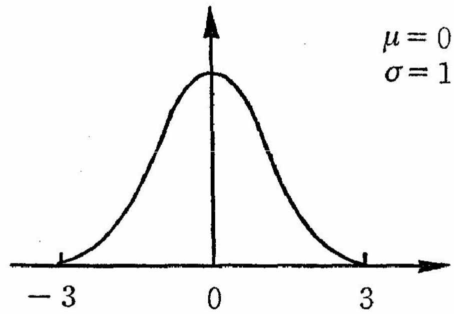


(b) 三角分布

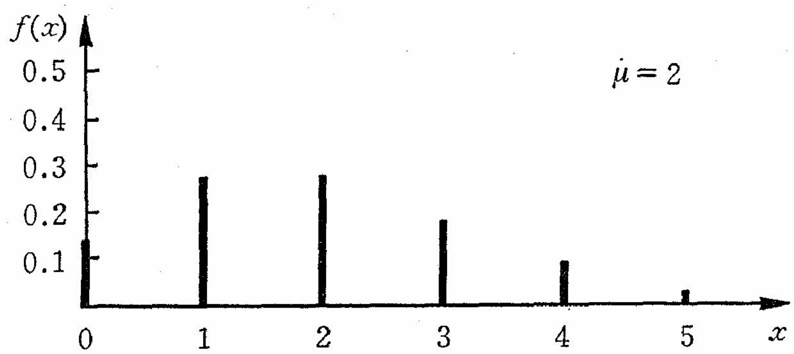


(c) 指数分布

図1　種々の



(d) 正規分布



(e) ポアソン分布

図1　種々の確率分布

確率分布

ついて，確率密度関数，シミュレーション実験において指定するパラメータ（母数），平均と分散について表1にまとめる[3)]。以下に記号を定義する。

a＝最小値

b＝最大値

m＝モード

α＝形状パラメータ

β＝尺度パラメータ

μ＝平均

σ＝標準偏差

そして，

x＝確率変数

$f(x)$＝確率密度関数

$p(x)$＝確率関数

とする。

また，各分布の概形を図1にまとめて示す。

(2) 一様分布（uniform distribution）

一様分布では，最小値（a）と最大値（b）の2個のパラメータで指定する。したがって2点見積りとなる。区間［a, b］にデータが落ちるという確証はあっても，それ以上の情報が得られない場合や，区間の長さに比例してその区間に落ちる確率が増加すると見込まれる場合に用いられる。

(3) 三角分布（triangular distribution）

三角分布では，最小値(a)，モード（m)，最大値（b）の3個のパラメータで指定する。したがって3点見積りである。図1(b)に示すように，区間［a, m］で直線的に増加し，そして区間［m, b］では直線的に減少する。そのため，このような分布形が妥当と思われる場合に採用される。

(4) 指数分布（exponential distribution）

指数分布では，パラメータは平均（μ）の1個である。分布形を特定する場合には，μ は未知であるから，標本平均でもって推定する。

指数分布は，エンティティの生起が他の生起と独立で微小時間間隔 Δx でただ一度の生起が生ずる確率は Δx に比例する場合に適用されるので，特にエンティティ（客，ジョブなど）の到着時間間隔によく用いられる（Ⅲ.4の数値例を参照のこと）。また，x 時間単位続いたアクティビティが，次の Δx

時間内に終了する確率はxの大小を問わず一定であるという指数分布の性質より，偶発故障の確率密度としても用いられる。

指数分布の分布形は図1(c)に示すように$x=0$で最大であり，$x>0$で単調減少である。

(5) 正規分布 (normal distribution)

正規分布では，パラメータは平均 (μ) と標準偏差 (σ) の2個である。分布形を特定化する場合には，μとσは未知であるから，それぞれ標本平均と標本標準偏差を用いる。

正規分布は作業時間などのサービス時間として一般に用いられる。多くの統計的手法が正規分布を基礎としており，統計学において最も重要かつ基本的な分布である。

(6) ポアソン分布 (Poisson distribution)

ポアソン分布では，パラメータは平均 (μ) の1個だけである。分布形を特定化する場合には，μは未知であるから，標本平均を用いる。

ポアソン分布は離散分布の1つである。典型的には，エンティティの到着時間間隔が指数分布に従うとき，到着数はポアソン分布に従うので，このような状況下で用いられる。

(7) ワイブル分布 (Weibull distribution)

ワイブル分布では，形状パラメータ (α) と尺度パラメータ (β) の2個のパラメータがある。

ワイブル分布は設備・機器の信頼性を考慮する場合によく用いられる。特に，$\alpha<1$の場合には初期故障型を，また$\alpha=1$の場合には指数分布型となり偶発故障型を，そして$\alpha>1$のときには摩耗故障型を表現することができる。

4. 分布の特定化

前節では，シミュレーション実験において入力データとして頻繁に用いられる主要な確率分布について検討し整理した。ストップ・ウォッチやカウンタを用いて直接収集したデータをヒストグラム等にまとめ，さらにデータの特長などを考慮することにより，分布形を特定することが可能となる。特に一様分布や三角分布などを特定化する場合には，アナリストがパラメータについても設定することもあろう。

特定した分布に対して適合性を調べる方法としてカイ2乗適合度検定(chi-square test for goodness of fit)を適用することができる。k 個のパラメータを推定値として用いた場合の χ^2 適合度検定の手順を以下に示す。

［ステップ1］ 大きさ n のデータ（標本）を得る。適宜の大きさの級に分け事象（級）A に落ちたデータの観測度数を f_i とする。

［ステップ2］ ステップ1で得られた結果から母集団の確率分布を直観的に推定する。そして，A_i $(i=1,2,...,r)$ がそれぞれ期待値 $n\theta_i$ で起こるとされる帰無仮説を設定する。すなわち，

$$H_0 : f_1=n\theta_1,\ f_2=n\theta_2, \cdots,\ f_r=n\theta_r$$

ここに，$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_r=1$ である。

なお，$n\theta_i \geq 5$ であることが必要である。

［ステップ3］ 次式の値を求める。

$$\chi_0^2=\frac{\sum_{i=1}^{r}(f_i-n\theta_i)^2}{n\theta_i} \qquad (1)$$

［ステップ4］ $\chi_0^2 > \chi^2{}_{r-k-1;\alpha}$ の場合には，帰無仮説 H_0 を棄却する。さもなくば，H_0 を採択する。

5. 数値例1

ある食堂へ到着する客（グループの場合を含む）の時間間隔を測定しフィールド・データを得た。客の到着時間間隔について，分布型を特定し，パラメ・タを推定する。

［ステップ1］ データの大きさ（n）は44であり，級分けを行う。

［ステップ2］ ステップ1より，時刻 x が大きくなるに従い観測度数が減少するのがわかる。そこで，指数分布とみなせるか否かを検討する。すると，44グループの客のうち，到着時間間隔が x_{i-1} と x_i の間に到着するグループ数は

$$n\theta_i=44\left(e^{-\frac{x_i}{23.80}}-e^{-\frac{x_{i-1}}{23.80}}\right) \qquad (i=1,2,\cdots,r)$$

と推定される。ここに標本平均は23.80である。すべての $n\theta_i$ が5以上になるようにくみわけした後の結果を表2に示す。

表2　くみわけ後の結果

i	級の境界	標本の観測度数，f_i	期待値，$n\theta_i$	$\frac{(f_i-n\theta_i)^2}{n\theta_i}$
1	0〜15	22	20.57	0.099
2	16〜30	12	10.96	0.099
3	31〜45	5	5.83	0.118
4	46〜	5	6.64	0.405
		44	44	0.721

［ステップ3］

$$\chi_0^2=\frac{\sum_{i=1}^{4}(f_i-n\theta_i)^2}{n\theta_i}$$

$$=0.721$$

を得る。$\alpha=0.05$にとれば，$\chi^2_{2;0.05}=5.991$（ここに，自由度は $4-1-1=2$。）である。

［ステップ4］　このデータが指数分布からとられた標本とみなせるという仮説を採択し，そして分布の平均を23.80（秒）と推定することができよう。

Ⅳ．出力結果に関する統計学的諸問題

1.　終結システムと非終結システム

Ⅲでは入力データに関する統計学的問題のうち，特にデータ収集と分布型について検討した。もう一方の統計学的問題として，出力に関する解析に関する事項がある。

シミュレーション・モデルでは，一般に1つ以上の確率的要素（入力データに対応する）が含まれている。したがって，シミュレーション実験はいわば標本抽出実験であって，ある乱数集合に対するシミュレーション・モデルの応答を観測するものと解釈できる。そのため，別の乱数集合を用いて，同じモデルに対して実験を繰り返すことができる。実行の度ごとに1組の応答を得ることができ，それらのデータ間にバラツキが生ずる。そのため，唯1回のシミュレーション実験による結果だけで，“真の”システム応答とみなすことはできない。このことが出力結果に対して統計的検討が必要な理由である。

出力結果に関して統計的な検討を行う際に，シミュレーション・モデルが(1)終結システム（terminating system）であるか，(2)非終結システム（non-terminating system）であるかを区別しなければならない[4]。ここに，終結システムとは，定められた時間（条件）になるとアクティビティを終了するものをいう。たとえば，銀行の窓口は午前9時より午後3時まで営業するので終結システムである。これに対して，非終結システムとは，アクティビティの終了を規定しないものをいう。たとえば，電話交換作業などは，オペレータは交替するかもしれないが，電話交換作業自体は続けられる。

終結システムでは，システムの初期状態と終結条件が定められているので，実行長さは操作できない。したがって，データ数を増加させるには，異なる乱数を用いて実行を繰り返せばよい。一実行内の観測値は互いに関連していることもあるが，実行間の観測値は独立と考えてよかろう。したがって，各実行から得られた観測値をデータとすれば，出力解析のために，種々の統計的手法を適用することができる。

非終結システムでは，一般に定常状態におけるパフォーマンスに関心がある。非終結システムのデータの取扱いに際しては，初期条件の影響や，観測値の個数など，解析を進めるうえで複雑な問題が多く存在する。ここでは，終結システムについて検討する。

2. 出力結果の分類

終結システムについて，内容から出力結果を分類すると次のようになる。

1) エンティティのシステム（サブシステム）内滞留時間
2) 被処理エンティティ数
3) 総処理時間
4) 稼動（働）率，利用率
5) 待ち行列，仕掛品

また，1回の実験によって得られる観測値の性質や個数の観点から，次のように分類される。

① システム（サブシステム）を通過したエンティティの個数だけ観測値が得られるもの：上記分類1)。
② 観測値が1個だけ得られるもの：上記分類2)，3)。
③ 観測値が一実行内で時系列的に変化するもの：上記分類4)，5)。

上記①については，1回の実験でもってエンティティの個数だけデータが得られる。また上記③では，シミュレーション時間に対して，平均，標準偏差，最大値，最小値といった値が，実験1回につきそれぞれ1個だけ得られる。そして，②では，実験1回について1個のデータが得られる。したがって，②および③について統計的手法を用いて解析をするためには，異なる乱数を用いて実験を繰り返す必要がある。

3. 統計的推定

(1) はじめに

終結システムに対しては，実行長さは操作できないので，データ数を増加させるには，実行回数を重ねなければならない。一実行内の観測値は互いに関連があることもあるが，各実行間の観測値は独立である。したがって，従来の統計的手法の多くを適用して，統計的推定や統計的検定を実施することができる。そこでⅣ.3では統計的推定について考察を加え，そしてⅣ.4では統計的検定について考察する。本稿では，シミュレーション技法を実際に適用する際に，基本的に考慮しなければならない重要な問題に限定する。

(2) 平均の区間推定量

終結システムにおいて，ある応答の信頼区間を得るために，N回の実行を繰り返すものとする。以下本稿では，x_j を j 番目の実行において応答した変数の値とする。

標本平均は次式で与えられる。

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j \tag{2}$$

そして，標本分散は次式で与えられる。

$$s^2=\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(x_j-\bar{x})^2 \tag{3}$$

いま，x_j を独立と仮定すれば，$\bar{x}$ の標本分散は次式で与えられる。

$$s_{\bar{x}}^2=\frac{s^2}{N} \tag{4}$$

もし x_j が正規分布に従うものとすれば，$\mu=E(x)$ に対する $(1-\alpha)\times$ 100％信頼区間は次式で与えられる。

$$\bar{x}-t_{N-1;\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{N}}\leq\mu\leq\bar{x}+t_{N-1;\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{N}} \qquad (5)$$

ここに，$t_{N-1;\alpha/2}$ は自由度 $N-1$ の t 分布の上側 $\alpha/2$ 点である。

実行間において，異なる乱数を用いて繰り返し実行しているのであるから，x_j は独立である。もし x_j 自身が平均システム滞留時間のごとく平均であれば，中心極限定理より正規性を仮定してよい。もし x_j が各実行における最小観測値もしくは最大観測値であるならば，正規性は疑わしくなるが，実行回数が多い（20以上）場合には，実務上問題は生じないであろう。

(3) システム応答の分布

前節では，1回の実行につき1個の観測値（データ）が得られる場合の平均の区間推定量について検討した。ここでは，観測値が落ちる区間と確率について検討する。

観測値が正規分布とみなせる状況下では，観測値（データ）は次のようになる。

1.1） 観測値のおよそ99.7%は区間

$(\bar{x}-3s,\ \bar{x}+3s)$

に落ちる。

1.2） 観測値のおよそ95%は区間

$(\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s)$

に落ちる。

1.3） 観測値のおよそ68%は区間

$(\bar{x}-s,\ \bar{x}+s)$

に落ちる。

1.4） 観測値のおよそ50%は区間

$$\left(\bar{x}-\frac{2}{3}s,\ \bar{x}+\frac{2}{3}s\right)$$

に落ちる。

また，次のように表現することもできよう[3]．

2.1） 観測値の99%は区間

$(-\infty,\ x+2.326s)$

に落ちる。

2.2） 観測値の95%は区間

$$(-\infty,\ x+1.645\,s)$$

に落ちる。

4.　統計的検定

(1)　はじめに

前節では統計的推定について検討した。従来の統計学の枠組みのなかで，統計的検定に関しても同様に検討することができる。ここでは，実用上最も基本的かつ重要と考えられる以下の３件に関して考察する[4]。

1)　等分散性の検定

2)　平均値の差の検定

3)　分散分析

上記の各検定において，1)と2)については２つの異なる実験条件（入力データ）のもとにシミュレーション実験を実行する際に用いられる。また3)については，３つ以上の異なる実験条件あるいは複数の要因(入力データの種類)のもとに実験を実行する場合に，実験条件・因子間でシステム応答に差異が認められるか否かを判定するのに用いられる。

(2)　等分散性の検定

２組の観測値について，互いに独立な正規分布からの標本であるとする。(標本の大きさが“大きい”場合には問題はない。)　母分散をそれぞれ σ_1^2, σ_2^2 とするとき，次の仮説

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1 \tag{6}$$

を対立仮説

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\neq 1 \tag{7}$$

に対して，標本の大きさ N_1, N_2 および標本分散 s_1^2, s_2^2 を基に $100\alpha\%$ 有意水準で検定する。すなわち，この両側検定の棄却域は次式を満たす $(s_1^2,\ s_2^2)$ の値の集合である。

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}<F_{N_1-1,\ N_2-1;\,1-\alpha/2} \tag{8}$$

あるいは

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{N_1-1,\ N_2-1;\alpha/2} \tag{9}$$

ここに，$F_{N_1-1,\ N_2-1;\alpha/2}$ は自由度 (N_1-1, N_2-1) の F 分布の上側 $\alpha/2$ 点である。

$(s_1^2,\ s_2^2)$ が上式を満足するとき，100α%有意水準で s_1^2 と s_2^2 は有意に異なると判断し，２つの異なる実験条件のもとで得られるシステム応答の分散は異なると判断する。

(3) 平均の差の検定

等分散性の検定の結果，２つの異なる実験条件のもとで得られるシステム応答について，それらの分散 $(\sigma_1^2,\ \sigma_2^2)$ は未知であるが，ある未知の σ^2 に等しいと判断してよい場合には，以下の手順によって，システム応答の平均の差に関する検定を行うことができる。

いま，$N(\mu_1,\ \sigma^2)$ と $N(\mu_2,\ \sigma^2)$ から得られた２組の標本について，仮説

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \tag{10}$$

を対立仮説

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 \tag{11}$$

に対して片側（左側）検定を行うことを考える[5]。

この検定に対する棄却域は

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{N_1} + \dfrac{1}{N_2}}} < t_{N_1+N_2-2;1-\alpha} \tag{12}$$

を満たす $(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ s_1,\ s_2)$ の値の集合である。ここに，

$$s_w^2 = \frac{(N_1-1)s_1^2 + (N_2-1)s_2^2}{N_1+N_2-2} \tag{13}$$

である。

また，$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ と判断される場合には式 (12) のかわりに

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{N_1} + \dfrac{s_2^2}{N_2}}} < t_{m;1-\alpha} \tag{14}$$

を用いる。ここに，

$$\frac{1}{m}=\frac{c^2}{N_1-1}+\frac{(1-c)^2}{N_2-1} \tag{15}$$

また

$$c=\frac{\dfrac{s_1^2}{N_1}}{\dfrac{s_1^2}{N_1}+\dfrac{s_2^2}{N_2}} \tag{16}$$

である。

以上の検定により，２つの異なる実験条件のもとで実行されたシステム応答の平均に対して大小関係の有無を判定することができる。

(4)　分散分析

品質管理において，少ない計算労力で実験を計画し，得られた結果を効率的に解析するために実験計画が適用される。シミュレーション実験の結果を解析する場合にも，この実験計画法と，統計的解析法である分散分析を適用することが可能である。したがって，実験計画法の考え方をシミュレーション実験の実行計画にとり入れ，実験条件や繰返し回数をあらかじめ設定して実験を実施することも肝要である。

シミュレーション実験を実施する場合に，システム応答に影響を与えると考えられる要因（あるいは因子）をとりあげ，そしておのおのの要因を数種の水準に設定して，それぞれ所定の回数のシミュレーション実験が行われる。要因の数によって一元実験配置，二元実験配置などがあり，種々の分散分析を実施することが可能である。

分散分析では，帰無仮説として水準間に差がないこと，さらに２因子交互作用がないこと，が設定される。(次項の数値例２を参照のこと。)

5.　数値例 2

前項までに述べた統計的手法を例題に適用する。

［モデルの説明］

1)　２工程で構成されるフロー・ショップ型の生産システムを解析の対象とする。第１工程および第２工程における単位加工時間は，それぞれ $N(10,\ 1^2)$，$N(10,\ 3^2)$（単位：分）に従い，たがいに独立である。また，ジョブの積込み・積おろしに要する時間や，各工程における準備時間に

ついては，無視できるものとする。

2) 素材置場の素材の量はじゅうぶんにあり，第1工程への素材供給には支障がないものとする。

3) 仕掛品置場が半成品で満杯のときには，第1工程は，当該ジョブの加工を完了した後で，遊休状態となる。その後，仕掛品置場へ半成品を置くことができるようになったときに，第1工程は再び稼動可能な状態となる。

4) 100個の生産が完了した時点で，生産を打切る。すなわち終結システムとして扱う。

[実験結果]

工程間の仕掛在庫容量を，1個，3個，5個として，それぞれについて20回実行した。そして，実験結果として得られた，100個の生産を完了するのに要する総生産時間(総処理時間)について，標本平均と標本標準偏差を表3にまとめて示す[6]。

表3 数値例2の実験結果

仕掛品の在庫容量	標本平均, $\overline{x}$ (分)	標本標準偏差, s (分)
1	1,068.75	21.356
3	1,037.14	12.720
5	1,035.33	13.405

[統計的解析]

1) 工程間の仕掛在庫容量が3個と5個の場合について，等分散性の検定を行う。この場合

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}=0.90$$

となる。ここに添字1は3個の場合を示し，添字2は5個の場合を示す。$F_{19,19;0.925}=0.39$，また $F_{19,19;0.025}=2.53$ であるから5％有意水準で帰無仮説を採択する。つまり，仕掛在庫容量が3個の場合と5個の場合で分散は有意に異ならないと判断する。

2) 1)にひき続いて，仕掛在庫容量が3個と5個の場合において，平均の

差の検定を有意水準5％の片側（右側）検定で行う。この場合，

$$\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{N_1}+\dfrac{1}{N_2}}}=0.438$$

であり，$t_{38;0.05}=1.686$ であるから，帰無仮説を採択する。したがって，仕掛在庫容量が3個と5個の場合，両者の間で，総生産時間には差は認められないと判断してよかろう。

3）工程間の仕掛在庫容量を要因とし，1個，3個，5個の3水準を設定して一元実験配置に対して解析を行った結果を表4に示す。その結果，仕掛在庫容量の個数の間で，総生産時間について有意差があると判断される。

表4　一元実験配置の解析結果

要　因	2 乗 和	自 由 度	平均2乗	F 検 定
標 本 間	14,131.44	$s-1=2$	7,065.72	26.578
標 本 内	15,153.44	$n-s=57$	265.85	

6. 考　察

本章では，従来の統計的解析の枠組みのなかで，特に統計的推定および検定について，シミュレーション実験結果へ適用する際の問題点を指摘し，その手順を述べた。そして，簡単な例題に対して統計的検定を行った。いくつかの代替案を比較・評価するためには，1回の実験結果のみで結論を下すのは妥当ではなく，シミュレーション実験の計画をたてて統計的解析を実施する必要があることを指摘した。

所与の実験条件のうちで，特定のシステム応答が最適になるような代替案を求めるには，最適手順を別途構築する必要がある。（たとえば文献7）を参照のこと。）

V. 結　言

本稿では，生産活動，流通・商業活動，サービス活動などの経営活動を分析するために，シミュレーション技法を適用する際に生ずる統計学的諸問題について考察した。特に，実際にシミュレーション技法を適用するにあたっ

て，モデルの入力データ，および実験結果の解釈の２段階において考慮すべき問題を，統計学的観点から検討した。

注

〔1〕 シミュレーション(simulation)には，①シミュレーション言語で表現されたモデルについて実験を実施するシミュレーション，②縮小モデルを用いた物理的モデルを用いたシミュレーション，③CAD手法を用いたシミュレーション，などがある。本稿では①をシミュレーション技法と定義して用いる[1]。

〔2〕 ヒストグラムにより示される分布を度数分布（あるいは経験分布）という。これに対して，推定の対象とする真の分布を確率分布（あるいは理論分布）といい，前者と区別する。

〔3〕 正規分布表（たとえば文献 5)）により求めることができる。

〔4〕 統計的方法の詳細についてはたとえば文献 6）を参照のこと。

〔5〕 右側検定，両側検定についても同様に解析が可能である。

〔6〕 シミュレーション言語には SIMAN を用いた。詳しくは文献 4）を参照のこと。

文献

1) 高桑宗右ヱ門：“生産システム解析におけるシミュレーションに関する一考察”，東洋大学経営論集，Vol. 28 (1987)，pp. 107–126.

2) 高桑宗右ヱ門：“ＯＡ・ＦＡシステムにおける定量的システム技法に関する一考察——線形計画法とシミュレーション技法の潜在的効用——”，『オフィス・オートメーション』，Vol, 7, No. 4 (1986)，pp. 65–72.

3) M. R. Spiegel : *Probability and Statistics*, McGraw-Hill, New York (1975), pp. 108–151.

4) C. D. Pegden : *Introduction to SIMAN*, Systems Modeling Corp., State College (1986)；高桑宗右ヱ門訳：『SIMAN による FA・生産システムのシミュレーション』，コロナ社 (1987)，pp. 261–267.

5) 森口繁一編：『数値表(A)』，日科技連(1960)，pp. 18–19.

6) I. Guttman, S. S. Wilks : *Introductory Engineering Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1965)；石井恵一，堀素夫共訳：『工科系のための統計概論』，培風館 (1968)，pp. 129–270.

7) 高桑宗右ヱ門：“単一目標・単一決定変数で表現される生産システムの最適化——シミュレーション技法を用いた生産システムの最適化に関する研究（第１報)”，日本経営工学会昭和62年度秋季研究大会予稿集 (1987)，pp. 59–60.